

Aufgabe 1

Ein Körper der Masse 2.5 kg wird in einer Höhe von 30 m losgelassen und fällt zu Boden.

- a) Wie wird sich die Geschwindigkeit des Körpers qualitativ entwickeln und wie stark ändert sie sich mit fortschreitender Zeit?
- b) Wie wird sich die y-Koordinate bzw. die Höhe des Körpers qualitativ entwickeln und wie stark ändert sich die Höhe mit fortschreitender Zeit?

Offenbar ist die Beschleunigung die Änderungsrate der Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit wiederum die Änderungsrate der Koordinate. Für den freien Fall ist die Beschleunigung durch die Gravitationskonstante

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

gegeben. Es ergibt sich allgemein:

$$\frac{dv}{dt} = a(t)$$

und

$$\frac{dy}{dt} = v(t)$$

Im Fall des freien Falls ist die Beschleunigung durch die Konstante g gegeben. Somit können Formeln für die Geschwindigkeit v und für die Koordinate y durch einfaches Integrieren gewonnen werden.

- c) Bestimmen Sie die Formel für die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit v für eine konstante Beschleunigung $a = -g$.
- d) Bestimmen Sie daraus die Formel für die zeitliche Entwicklung der Koordinate y . Nehmen Sie jeweils an, dass die Koordinate y nach oben zeigt.
- e) Sind Beschleunigung, Geschwindigkeit und Koordinate Skalare oder Vektoren?
- f) Bestimmen Sie die Zeit bis zum Aufprall des Körpers auf den Boden.

Lösungen:

- a) Die Geschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit zu. Die Änderungsrate der Geschwindigkeit ist g .
- b) Die Höhe nimmt quadratisch mit der Zeit ab. Die Änderungsrate der Koordinate ist die Geschwindigkeit.
- c) $v(t) = -g \cdot t + v_0$ mit $v_0 = v(t = 0)$
- d) $y(t) = \frac{-g}{2}t^2 + v_0 \cdot t + y_0$ mit $y_0 = y(t = 0)$
- e) Alle Größen sind Vektoren.
- f) $t \approx 2.47 \text{ s}$

Lösungsweg

Die Zeit bis zum Aufprall des Körpers auf den Boden bestimmt sich aus der Formel für die Koordinate y :

$$y(t) = \frac{-g}{2}t^2 + v_0 \cdot t + y_0$$

Mit $y_0 = 30 \text{ m}$ und $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$ sowie der Tatsache, dass die Koordinate y zur gesuchten Zeit t null ergeben muss, ergibt sich:

$$y(t) = \frac{-g}{2}t^2 + y_0 = 0 \text{ m}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} \approx 2.47 \text{ s}$$

Aufgabe 2

Die Ableitung einer Funktion nach einer ihrer Variablen beschreibt, wie sich der Funktionswert ändert, sofern sich diese entsprechende Variable ändert. Damit ist die Ableitung eine Änderungsrate, in einer Dimension kann man sie sich als Steigung der Funktion vorstellen.

- a) Wie kann man die Ableitung einer zeitabhängigen Funktion $f(t)$ näherungsweise bestimmen (Stichwort: Differenzenquotient)?

Die Beschleunigung a ist die Änderung der Geschwindigkeit v pro Zeit t , sie ist also die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Anhand des Differenzenquotienten lässt sich die Entwicklung der Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers rekursiv berechnen:

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = g$$
$$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + \Delta t \cdot g$$

Für den freien Fall ist die Beschleunigung konstant. Im Allgemeinen kann die Beschleunigung auch zeitabhängig und/oder ortsabhängig sein. Zur Berechnung der Geschwindigkeiten benötigt man also eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitschritt $n = 0$.

- b) Vergleichen Sie die Rekursionsformel mit der analytischen Gleichung der Geschwindigkeit für eine konstante Beschleunigung $a = g$.
- c) Stellen Sie eine ähnliche Rekursionsformel zur Entwicklung der Koordinate y für den freien Fall eines Körpers auf. Worin unterscheiden sich die Rekursionsformeln für Geschwindigkeit und Koordinate für den freien Fall?

Lösung:

- a) $\frac{df}{dt} \approx \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta t}$
- b) Beide Formeln haben gleiche Struktur.
- c) $y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot v(t_n)$. Während die Beschleunigung zeitlich konstant ist, ändert sich die Geschwindigkeit mit fortschreitender Zeit.

Aufgabe 3

Laden Sie den Programmcode via Moodle herunter und erfüllen Sie folgende Aufgaben.

- a) Ergänzen Sie den Programmcode aus Teil A um die Implementation des expliziten Euler-Verfahrens (Stichwort: Differenzenquotient), um den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit zu bestimmen.
- b) Ergänzen Sie ebenfalls den Programmcode aus Teil B um die Implementation des expliziten Euler-Verfahrens, um den zeitlichen Verlauf der Koordinate zu bestimmen. Beachten Sie, dass die Geschwindigkeit auf der rechten Seite nicht zeitlich konstant ist.
- c) Vergleichen Sie die numerischen Lösungen mit verschiedenen Zeitschritten mit den analytischen Lösungen aus Aufgabe 1).
- d) Sind die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) von der Grösse der Zeitschritte abhängig?
- e) Bestimmen Sie anhand des Programmcodes die Zeit bis zum Auftreffen des Körpers auf den Boden gemäss Aufgabe 1) (Hinweis: Beachten Sie die Grösse der Zeitschritte)

Hinweis:

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

$$\frac{dv}{dt} = a(t)$$

und

$$\frac{dy}{dt} = v(t)$$